Zufallsgrößen

Beispiel 4 Ertan und Kira wollen zweimal einen fairen Würfel werfen. Sie fragen sich, wie wahrscheinlich die verschiedenen Würfelsummen auftreten.

a) Welches Urnenmodell passt zu diesem Ereignis? Notieren Sie den Ereignisraum und die Anzahl seiner Elemente.

b) Erzeugen Sie mit dem ClassPad eine zweispaltige Tabelle mit jeweils 100 natürlichen Zufallszahlen von 1 bis 6.

   1. Notieren Sie in den Spalten `A` und `B` die Augenzahlen der Würfelwürfe. Zeichnen Sie zu jeder der Spalten ein Histogramm mit den relativen Häufigkeiten der Würfe in jeder Spalte. Notieren Sie die Beobachtung im Heft.
   2. Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten der Augensumme von zwei Würfen und stellen Sie sie in Form eines Histogramms dar. Notieren Sie die Beobachtung im Heft und erklären Sie sie.

c) Definieren Sie die Zustandsmenge E der Augensummen des Zufallsexperiments des zweifachen Wurfes eines fairen Würfels. Geben Sie auch eine Abbildung X zwischen Ω und E an, die das Zufallsexperiment beschreibt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Augensumme n.

Beispiel 5 a) Wiederholen Sie die Lösung von Beispiel 4 unter der -Oberfläche des ClassPad. Übertragen Sie die Werte unter Main in eine Tabelle und stellen Sie die Werte mit dar.

b) Wie groß sind die absolute und die relative Häufigkeit für Würfe und Wurfsummen von 1 bis 7? Folgern Sie hieraus die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Beispiel 6 a) Führen Sie ein Experiment des gleichzeitigen Wurfes zweier Münzen in einer Arbeitsgruppe praktisch durch, indem jeder von Ihnen zwei Münzen 50 Mal wirft und eine Liste der Anzahl der Kopfwürfe führt. Erklären Sie die Verteilung der Würfe.

b) Simulieren Sie mit dem ClassPad analog zu Beispiel 5 100 Würfe zweier Münzen mit zwei Seiten 1 und 2.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Teilen a) und b). Wie können Sie dieses Wissen in Zukunft verwenden?

Lösung von Beispiel 4. a) Es passt das Modell des Ziehens mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

$$\Omega = \big\{(i,j)\colon\ i,j \in \{1,\dots,6\}\big\} \quad \text{mit} \quad |\Omega| = 6^2 = 36.$$

b) 1) Wir werden unter Tabellenkalkulation arbeiten. Zunächst werden 100 Zufallszahlen in Spalte `A` eingefügt. Hierzu öffnen wir

`Edit` → `Füllen` → `Mit Werten füllen`

(Öffnen des Fensters zur Auswahl des zu füllenden Bereiches)

In die Zellen von `A1` bis `A100` sollen mithilfe von `=rand(1,6)` einhundert Zufallszahlen von 1 bis 6 eingetragen werden. Für 100 Zeilen ist `A1:A100` einzugeben, vgl. Abbildung 1.

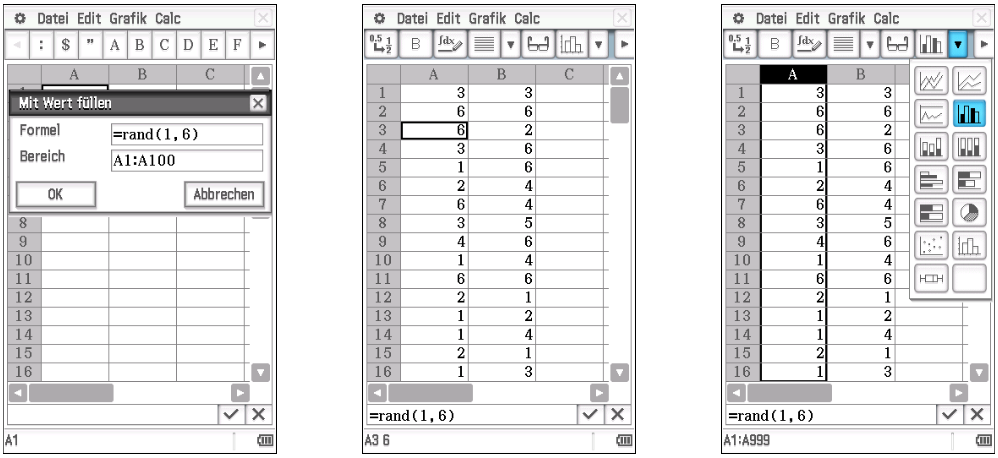

Abbildung 1: Spalten `A` und `B` eingeben und Histogramm zeichnen

Nach der Aktivierung von Spalte `A` kann, wie in Abbildung 1 zu sehen ist, das Histogramm gezeichnet werden. Analog gilt dies für die Daten der Spalte `B`.

Die Beobachtung zeigt, dass die relativen Häufigkeiten um den Wert $\frac{1}{6}$ liegen. Wie wir bereits wissen, ist die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl eines fairen Würfels gleich $\frac{1}{6}$.

2) In die Spalte `C` sollen die Summen `A[i] + B[i]` für $i = 1, \ldots, 100$ notiert werden. Diese Berechnung erfolgt unter (s. Abbildung 2 links):

`Edit` → `Füllen` → `Mit Werten füllen`

mit

[=] [abc] [↑] [A] [1] [+] [B] [1] [EXE] (Summe der Zellen `A1` und `B1`)

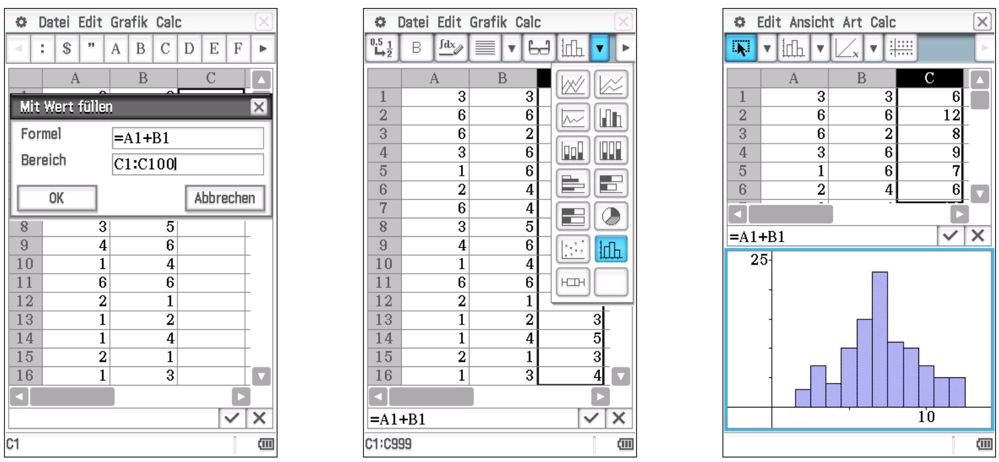

Abbildung 2: Spalte `C` und Histogramm zeichnen

Die Ergebnisse sind nicht gleichverteilt. Die relativen Häufigkeiten steigen beidseitig vom Randbereich in den mittleren Bereich der Augensumme an.

Dies liegt daran, dass es für die Zahlen von 1 bis 12 unterschiedlich viele Zerlegungen in zwei Summanden von 1 bis 6 gibt:

Wurfsumme	Augen der Würfel
1	$\emptyset$
2	$(1;1)$
3	$(1;2),(2;1)$
4	$(1;3),(2;2),(2;1)$
5	$(1;4),(2;3),(3;2),(4;1)$
$\vdots$	$\vdots$

Damit erklärt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die unterschiedlichen Augensummen.

c) Die Zustandsmenge ist $E = \{1, 2, \dots, 12\}$. Die Abbildung X wird wie folgt definiert:

$$X\colon\ \Omega \to E, \quad (i, j) \mapsto i + j.$$

Eine solche Abbildung heißt *Zufallsvariable* oder *Zufallsgröße*.

Für die Augensummen gibt es die folgenden Möglichkeiten:

$X = 2$	$(1;1)$	$\Rightarrow P(X=2) = \frac{1}{36}$
$X = 3$	$(1;2)\ (2;1)$	$\Rightarrow P(X=3) = \frac{2}{36}$
$X = 4$	$(1;3)\ (2;2)\ (3;1)$	$\Rightarrow P(X=4) = \frac{3}{36}$
$X = 5$	$(1;4)\ (2;3)\ (3;2)\ (4;1)$	$\Rightarrow P(X=5) = \frac{4}{36}$
$X = 6$	$(1;5)\ (2;4)\ (3;3)\ (4;2)\ (5;1)$	$\Rightarrow P(X=6) = \frac{5}{36}$
$X = 7$	$(1;6)\ (2;5)\ (3;4)\ (4;3)\ (5;2)\ (6;1)$	$\Rightarrow P(X=7) = \frac{6}{36}$
$X = 8$	$(2;6)\ (3;5)\ (4;4)\ (5;3)\ (6;2)$	$\Rightarrow P(X=8) = \frac{5}{36}$
$X = 9$	$(3;6)\ (4;5)\ (5;4)\ (6;3)$	$\Rightarrow P(X=9) = \frac{4}{36}$
$X = 10$	$(4;6)\ (5;5)\ (6;4)$	$\Rightarrow P(X=10) = \frac{3}{36}$
$X = 11$	$(5;6)\ (6;5)$	$\Rightarrow P(X=11) = \frac{2}{36}$
$X = 12$	$(6;6)$	$\Rightarrow P(X=12) = \frac{1}{36}$

Lösung von Beispiel 5: a) Öffnen Sie unter Main zunächst die -Oberfläche. Unter der geöffneten Oberfläche sind die folgenden Optionen zu setzen, vgl. Abbildung 3:

`2 Würfel +`		(Wurf zweier Würfel und Addition der Augenzahlen)
`Anzahl Versuche:`	100	(Anzahl der simulierten Würfe)
`Anzahl Flächen:`	6	(Anzahl der Seiten eines Würfels)

Das Ergebnis ist in Abbildung 3 zu sehen. In der oberen Zeile der unten notierten Tabelle befindet sich die Liste der möglichen Ergebnisse des Wurfes zweier Würfel von 2 bis 12. Darunter stehen jeweils die absoluten Häufigkeiten der Würfe.

Die Einträge der Tabelle sollen in kopiert werden. Dies funktioniert wie folgt:

`Edit` $\rightarrow$ `Kopieren` (Kopieren der markierten Tabellenzellen)

Dann kann die Tabelle mit

`Edit` $\rightarrow$ `Einfügen` (Ausgabe der gespeicherten Tabelleneinträge)

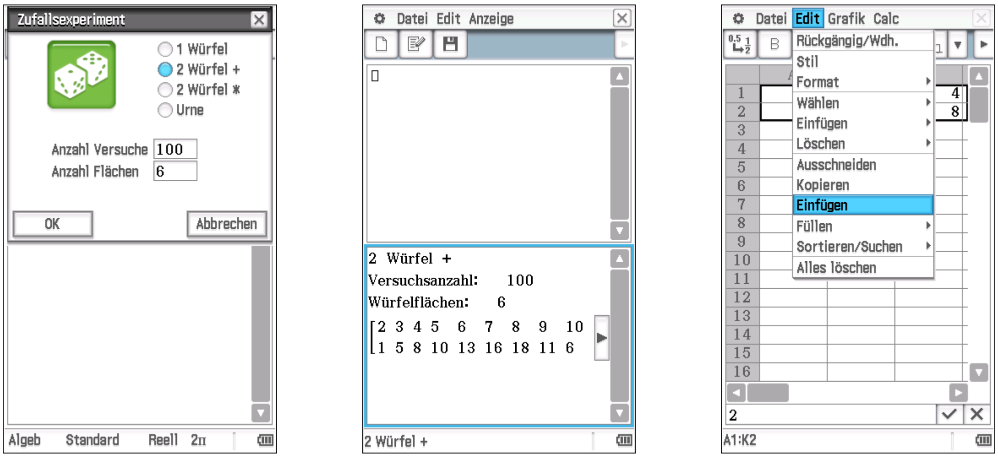

Abbildung 3: Simulation eines Würfelexperiments und Daten erstellen

gefüllt werden. Hier ist zu beachten, dass die Datensätze zeilenweise aufgebaut sind. Sie lassen sich dennoch graphisch darstellen.

`Graph` → `Daten als Zeile` (Einträge zeilenweise wählen)

Die Optionen für Graphen können unter [Symbol] wie gewohnt gewählt werden, wie Abbildung 3 zeigt.

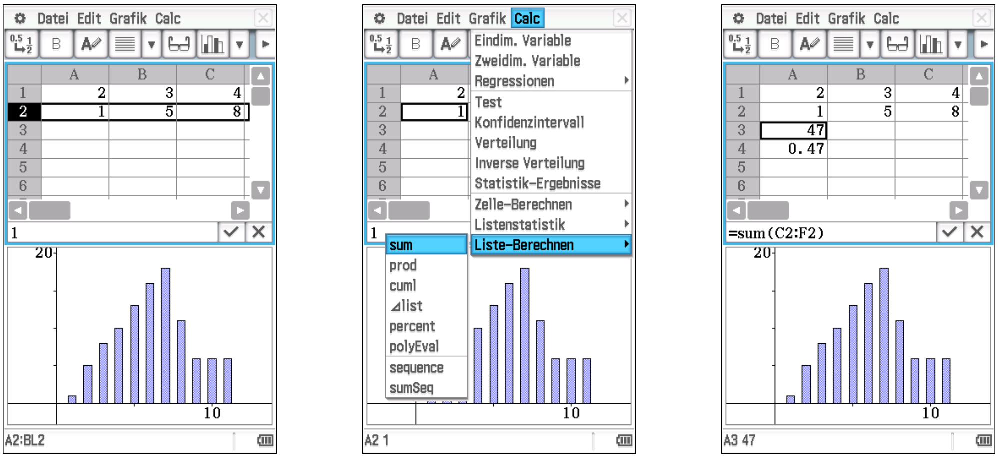

Abbildung 4: Tabelleneinträge graphisch darstellen

b) Zur Berechnung der Summe der Werte ist unter der Tabellenkalkulation

`Aktion` → `Liste-Berechnen` → [`sum`] (Summenerrechnung bestimmter Elemente der Tabelle)

zu öffnen. Für die absolute Häufigkeit $H_{4 \leqslant X \leqslant 7}$ wird die Summe von `C2` bis `F2` bestimmt, da die absolute Häufigkeit der Augensummen von 4 bis 7 angegeben werden soll.

Um die relative Häufigkeit der Würfe anzugeben, ist die Zahl aus Zelle `A3` durch 100 bzw. durch die Summe der Elemente der Zellen `A2` bis `K2` zu dividieren. Diese Berechnung ist in Abbildung 4, rechts, zu sehen.

Die relative Häufigkeit der Würfe von 4 bis 7 ist daher 0,53. Dies lässt die Vermutung $P(4 \leqslant X \leqslant 7) = 0{,}5$ zu.

Für jede der Augensummen n von 4 bis 7 gibt es $n - 1$, also zusammen 18 Permutationen. Insgesamt existieren 36 Tupel für Ergebnisse des Wurfes mit zwei Würfeln. Daher ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für den Wurf einer Augensumme von 4 bis 7 zu $P(4 \leqslant X \leqslant 7) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Lösung von Beispiel 6: a) Hier zeigt sich, dass die Kombination von einmal Wappen (W) und einmal Zahl (Z) ohne Beachtung der Reihenfolge ungefähr doppelt so häufig wie die beiden Kombinationen mit identischen Bildern auftritt. Dies liegt daran, dass es folgende Ergebnisse gibt: $(W;W), (Z;W), (W;Z), (Z;Z)$ und $\{Z;W\} = (Z;W) \cup (W;Z)$. Hieran ist sichtbar, dass der jeweils einmalige Wurf von Wappen und Zahl auf zwei verschiedene Arten und damit im Vergleich zu den anderen Ergebnissen mit doppelter Wahrscheinlichkeit auftreten kann.

b) Eine Münze kann als „Würfel mit zwei Flächen" aufgefasst werden. Es lassen sich beispielsweise die Zahl mit der Seite 1 und der Kopf mit der Seite 2 identifizieren.

Die Einstellungen für die Simulation sind wie folgt zu wählen:

`2 Würfel +`		(Wurf zweier Würfel und Addition der Augenzahlen)
`Anzahl Versuche:`	100	(Anzahl der simulierten Würfe)
`Anzahl Flächen:`	2	(Anzahl der Oberflächen der Würfel)

Die Anzahl der Flächen des „Würfels" ist gleich 2 zu setzen. Es wird eine Matrix ähnlich der folgenden ausgegeben:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 22 & 52 & 26 \end{bmatrix}.$$

Hier zeigt sich, dass die Augensumme 3 (d. h. einmal Wappen, einmal Zahl) etwa doppelt so oft vertreten ist wie die Augensummen 2 oder 4. Dies liegt daran, dass die Augensumme bei den Ereignissen $(1;2)$ und $(2;1)$ jeweils gleich 2 ist und es hiermit zwei Ereignisse der Augensumme 3 gibt:

Augensumme	mögliche Wurfergebnisse
2	$(1;1)$
3	$(1;2), (2;1)$
4	$(2;2)$

c) Die Ergebnisse aus den Teilen a) und b) sind fast identisch. Ein zweifacher Münzwurf kann daher mit dem Wurf zweier Würfel mit jeweils zwei Seiten identifiziert werden, indem man beispielsweise die Augenzahl 0 des Würfels mit dem Wappen der Münze und die Augenzahl 1 des Würfels mit der Zahl der Münze identifiziert. Damit stehen $\{0;0\}$ für zweimaligen Wappenwurf, $\{0;1\}$ für je einmaligen Wappen- und Zahlwurf und $\{1;1\}$ für zweimaligen Zahlwurf der Münzen.